

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۶

پژوهشنامه علوم دفاعی، شماره ۱۰، تابستان ۱۴۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۲۸

ص ص ۸۱ تا ۸۹

شبیه سازی عددی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری و کاربرد آن در علوم دفاعی

ابومسلم محمدی^۱، سعید حسن زاده^۲

چکیده

در این مقاله، ما به بررسی شبیه سازی عددی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری و کاربردهای آن در علوم دفاعی می پردازیم. برای شبیه سازی عددی این معادلات تحت شرایط مرزی مختلف از روش های طیفی برای گسسته سازی زمانی استفاده می کنیم تا روش پیشنهاد شده از قابلیت های محاسبات سریع، همگرایی نمایی و پایداری روش برخوردار باشد. روش های طیفی یکی از قدرتمندترین و پیشرفته ترین روش های عددی برای حل این معادلات هستند که به دلیل دقت بالا و نرخ همگرایی نمایی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است. به علت این ویژگی ها، روش های طیفی به عنوان یک ابزار محبوب در حوزه های مختلف علمی و صنعتی، از جمله علوم دفاعی، الکترونیک و هوافضا به کار گرفته می شوند. پس از گسسته سازی زمانی، یک پایه ای از چندجمله ای ها را معرفی می کنیم که شرایط مرزی همگن را داشته باشد. از چندجمله ای های لژاندر به عنوان پایه در روش پیشنهاد شده استفاده می کنیم. ما یک روش گالرکین را با این پایه ها برای فرمول بندی مجدد مساله به عنوان یک دستگاهی از معادلات جبری، پیشنهاد می کنیم. برای انجام محاسبات و برنامه نویسی از نرم افزار میپل استفاده می کنیم. نتایج به دست آمده نشان می دهد که روش پیشنهادی یک همگرایی مرتبه ثابت در زمان و یک همگرایی طیفی در مکان ارائه می کند.

کلمات کلیدی: شبیه سازی عددی، معادلات دیفرانسیل کسری، مشتق کسری، معادله KdV، روش طیفی، روش گالرکین.

^۱ مربی گروه ریاضی دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران.

^۲ مربی گروه ریاضی دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران.

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های موجود در محیط اطراف ما دارای طبیعت غیرخطی هستند و قابل توصیف با استفاده از معادلات غیرخطی می‌باشند. به دلیل پیشرفت سیستم‌های کامپیوتری، حل معادلات خطی آسان است، اما در حالت کلی، یافتن یک جواب دقیق برای معادلات غیرخطی قدری مشکل خواهد بود. هدف این مقاله بررسی یکی از روش‌های تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی است و برای دستیابی به این هدف، ابتدا به معرفی توابع حساب کسری می‌پردازیم. (دهقان و همکاران، ۲۰۱۸).

حسابان کسری ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی و حل مسائل پیچیده در علوم فیزیکی و مهندسی و دفاعی می‌باشد که باعث ایجاد مدل‌سازی‌های ریاضی منعطف متفاوتی شده و در مسائل فیزیکی و مهندسی و دفاعی با داده‌های آزمایشگاهی همخوانی بهتری دارد. این روش به ما اجازه می‌دهد تا در طراحی سیستم‌ها، تحلیل رفتار سیستم‌ها و پیش‌بینی حرکتی اجسام با دقت بیشتر و صحت بالاتری عمل کنیم. تحلیل و بررسی بسیاری از مسائل در حوزه علوم و مهندسی و مدل‌سازی آن‌ها در نهایت به انواع معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل کسری می‌انجامد. در علوم دفاعی، استفاده از این معادلات به دلیل قابلیت توصیف پدیده‌ها و سیستم‌های پیچیده به‌صورت دقیق و کامل، بسیار حائز اهمیت است. به همین دلیل، با استفاده از این معادلات می‌توان حرکت اجسام مانند موشک‌ها، پهپادها و سیستم‌های پرتاب را مدل کرده و شبیه‌سازی کرد. این امر می‌تواند در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های دفاعی با قابلیت پیش‌بینی حرکت و سرعت اجسام استفاده شود. همچنین استفاده از این معادلات در مدل‌سازی سیستم‌های راداری و سنسوری می‌تواند به کاهش نویز، پیش‌بینی قابلیت‌های این سیستم‌ها و بهبود عملکرد آن‌ها کمک کند. به‌دست‌آوردن جواب‌های تحلیلی این معادلات همیشه امکان‌پذیر نبوده و در بسیاری از موارد تقریباً غیرممکن است. بنابراین محققان برای حل این دسته از معادلات ملزم به استفاده از روش‌های عددی جهت تقریب جواب تحلیلی شده‌اند. روش‌های طیفی یکی از جدیدترین تکنیک‌ها برای حل عددی این معادلات بوده که به دلیل دقت بالا و نرخ همگرایی نمایی موردتوجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است، در این روش‌ها انتخاب توابع پایه‌ای و توابع آزمون نقش اساسی دارد. توابع پایه به‌عنوان توابع تقریب در بسط جواب مساله به‌کار می‌روند و توابع آزمون برای تضمین این‌که سری به‌دست‌آمده برای تقریب تابع جواب، با حداکثر دقت ممکن در معادله صدق کند، مورد استفاده قرار می‌گیرند (شن^۱ و همکاران، ۲۰۱۱). در این کار، ما معادله کسری KdV را در نظر می‌گیریم و پس از معرفی یک پایه مناسب، یک‌روش عددی گالرکین ارائه می‌کنیم (گوپتا^۲ و همکاران، ۲۰۱۸؛ جی هوان هی^۳، یو جی سون^۴ و همکاران، ۲۰۲۱).

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad (x, t) \in \Omega \times I \quad (1)$$

که دامنه مکانی $\Omega = [-1, 1]$ و دامنه زمانی $I = (0, T)$ با شرایط اولیه و مرزی به‌صورت زیر

-
1. Shen
 2. Gupta
 3. JI-HUAN HE
 4. Yu, Z, J, Sun

$$u(x, 0) = g(x)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in I \quad (2)$$

که $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ مشتق کسری کپوتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ است (کپوتو^۱، ۲۰۱۵).

مشتقات کسری به ما امکان می‌دهند تا به‌طور دقیق‌تری پدیده‌ها را توصیف کنیم و به نتایج تجربی نزدیک‌تر شویم. از این‌رو، توسعه تکنیک‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به یک حوزه مهم در تحقیقات می‌تواند تبدیل شود. مشتق کسری کپوتو و ریمان لیوویل در تحلیل مسائل پیچیده در زمینه‌های مختلف از جمله فیزیک، ریاضیات، مهندسی و علوم طبیعی، امکان می‌دهد تا به توصیف دقیق‌تری از پدیده‌ها و سیستم‌ها بپردازیم. استفاده از این نوع مشتق می‌تواند در تحلیل و مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده در حوزه‌های علمی و مهندسی مفید باشد. مشتق کسری کپوتو و ریمان لیوویل از مرتبه α به صورت ${}_0^C \partial_t^\alpha u$ و ${}_0^{RL} \partial_t^\alpha u$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$${}_0^C \partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \quad (3)$$

$${}_0^{RL} \partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (4)$$

پیشینه تحقیق و مبانی نظری

تاریخچه حساب کسری به قرن ۱۷ بازمی‌گردد و بحث‌ها و تلاش‌های اولیه آن شامل آثار محققانی نظیر لایبنیتز، اویلر، لاگرانژ، آبل، ریمان، لیوویل و بسیاری دیگر بوده است. توسعه مفهوم مشتق $D^\alpha f(x)$ برای مقادیر غیر صحیح α ، که به آن محاسبات کسری می‌گویند، از زمان ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توجه محققین را جلب کرده است، اما تا دهه‌های اخیر کاربردهای عملی این مفهوم به طور چشمگیری مورد توجه قرار نگرفته است (پودلوبنی^۲، ۱۹۹۸). اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منسوب به لایبنیتز و هوپیتال در سال ۱۶۹۵ است که در آن هوپیتال در نامه خود از لایبنیتز پرسید:

عملگر $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ در صورتی که $n = \frac{1}{p}$ باشد، چه توجیهی دارد؟

لایبنیتز نیز پاسخ داد:

«این یک پارادوکس آشکار است و روزی نتایج مفیدی آن آشکار خواهد شد.»

چندجمله‌ای‌های متعامد

چندجمله‌ای‌های متعامد^۱ دنباله‌ای نامتناهی از چندجمله‌ای‌هایی است که دوبه‌دو بر یکدیگر عمود هستند. چندجمله‌ای‌های هرمیت، لاگر و ژاکوبی از معروف‌ترین چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که در بازه‌های نامتناهی، نیمه‌متناهی و متناهی خاصیت تعامد دارند. چندجمله‌ای‌های چبیشف و لژاندر نیز حالت‌های خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی بوده که بر بازه $[-1, 1]$ متعامدند. این چندجمله‌ای‌ها در حوزه‌های مختلفی مانند انتگرال‌گیری عددی، تقریب توابع، پردازش سیگنال، مکانیک کوانتومی و آنالیز آماری کاربردهای فراوانی دارند. به عنوان مثال، استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد به سادگی فرایند تقریب تابع موردنظر با استفاده از بسط سری را تسهیل می‌کند. به طور کلی، این چندجمله‌ای‌ها ابزار قدرتمندی در تجزیه و تحلیل ریاضی و کاربردهای آن‌ها هستند و چارچوبی سامان‌یافته و کارا در حل مسائل مختلف ارائه می‌دهند. خاصیت متعامد ویژگی آن‌ها را در حل معادلات، تقریب توابع و نمایش پدیده‌های فیزیکی بهبود می‌بخشد. خواص و کاربردهای چندجمله‌ای‌های متعامد آن‌ها را به یک مفهوم اساسی در بسیاری از زمینه‌های علمی و مهندسی می‌کند (دیتلم^۲، ۲۰۱۰؛ پودلوبنی^۳، ۱۹۹۸).

چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر، که با نماد $P_n(x)$ نشان داده می‌شوند، یک مجموعه از چندجمله‌ای‌های متعامد روی بازه $[-1, 1]$ هستند. در این مقاله برای ارائه روش عددی از پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر درجه N استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند (فاروکی^۴، ۲۰۱۲).

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (5)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n(1) = 1$$

این چندجمله‌ای‌ها یک دستگاه متعامد می‌دهند:

$$L_n(t) = P_n\left(\frac{2t}{T} - 1\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_a^b L_m(t)L_n(t) dt = \frac{T}{2n+1} \delta_{m,n}, \quad \forall i, j = 0, \dots, N \quad (6)$$

-
1. Orthogonal polynomials
 2. Diethelm
 3. Podlubny
 4. Farouki

روش‌شناسی پژوهش

معادله کسری KdV را با شرایط اولیه و مرزی که به صورت (۱) - (۲) داده شده است در نظر بگیرید (خادر^۱ و همکاران، ۲۰۲۱؛ کولاهان^۲ و همکاران، ۲۰۱۹؛ دهقان^۳ و همکاران، ۲۰۱۷)، با بازنویسی معادله به صورت

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \mathcal{L}u + \mathcal{N}u = f$$

$$\mathcal{L}u = \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathcal{N}u = 2u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۷)$$

که $\mathcal{L}u$ بخش خطی و $\mathcal{N}u$ بخش غیرخطی است، در گام زمانی $t = t_{n+1}$ با استفاده از طرح کرانک-نیکلسون^۴ داریم:

$$\mu_{n+1} u^{n+1} + \theta (\mathcal{L}(u^{n+1}) + 2(u^{n+1} u_x^n + u^n u_x^{n+1})) = F^{n+1} \quad (۸)$$

که سمت راست این معادله در گام زمانی t_{n+1} ، تابعی معلوم برحسب توابع $u^0, u^1, \dots, u^n$ است که در گام‌های زمانی قبل به دست آمده‌اند.

$$F^{n+1} = \theta f^{n+1} - (1 - \theta) (\mathcal{L}(u^n) + \mathcal{N}(u^n) - f^n) - \sum_{j=0}^n \mu_j u^j + 2\theta u^n u_x^n \quad (۹)$$

با شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر

$$u^0 = g(x)$$

$$u^{n+1}(0) = 0, \quad u^{n+1}(1) = 0, \quad \frac{d}{dx} u^{n+1}(1) = 0 \quad (۱۰)$$

بنابراین در هر گام زمانی یک معادله به فرم $\mathcal{L}u^{n+1} = F^{n+1}$ را داریم. رابطه (۷) در هر گام زمانی یک معادله دیفرانسیل است که می‌خواهیم آن را به روش گالرکین حل کنیم (دهقان^۵ و همکاران، ۲۰۱۸).

-
1. Khader
 2. Kevlahan
 3. Dehghan
 4. Crank-Nicolson

1. Dehghan

روش گالرکین

در این روش ابتدا گسسته‌سازی زمانی را انجام می‌دهیم و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\mu_{n+1}(u^{n+1}, v) + \theta(\mu(\partial_x^3 u^{n+1}, v) - \gamma(\partial_x^2 u^{n+1}, v) + 2(u^{n+1} u_x^n, v) + 2(u^n u_x^{n+1}, v)) = (F^{n+1}, v) \quad (11)$$

به‌ازای هر $v \in L^2(\Omega)$ سپس تابع u^{n+1} را برحسب توابع پایه $\{\varphi_i(x), i = 1, \dots, N-2\}$ تقریب می‌زنیم.

$$u_M^{n+1}(x) \approx \sum_{j=1}^{M-2} \omega_j^{n+1} \varphi_j(x) \quad (12)$$

در رابطه بالا ω_j ها مجهول‌اند که با حل دستگاه معادلات جبری زیر ω_j ها را در هر گام زمانی به‌دست می‌آوریم.

$$\mu_{n+1}(u_M^{n+1}, v_n) + \theta(\mu(\partial_x^3 u_M^{n+1}, v_n) - \gamma(\partial_x^2 u_M^{n+1}, v_n) + 2(u_M^{n+1} u_x^n, v_n) + 2(u_M^n u_x^{n+1}, v_n)) = (F^{n+1}, v_n), \quad \forall v_n \in W_N^\circ \quad (13)$$

روش پیشنهادی با در نظر گرفتن $v_n = \psi_j$ ، $j = 1, \dots, N-2$ منجر به یک دستگاه خطی می‌گردد که می‌توان آن را به‌صورت ماتریسی به‌فرم زیر نوشت:

$$A\omega^{n+1} = f^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

که ω ضرایب جواب تقریبی است.

یافته‌ها

در اینجا، با چند مثال عددی بحث نظریه همگرایی روش پیشنهادی را آزمایش می‌کنیم. برای انجام محاسبات از نرم‌افزار میپل نسخه ۲۲ استفاده کرده‌ایم. برای محاسبه خطا از نرم L^∞ استفاده کرده‌ایم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_\infty \approx \max |U(x_i, T) - u_M^n(x_i)|$$

که در آن U جواب دقیق مسأله $(1-2)$ و u_M^n جواب تقریبی (12) است. همچنین نرخ همگرایی نسبت به مکان و زمان را با روابط زیر محاسبه کرده‌ایم:

$$EOC_i = \frac{\ln(e_{i+1}/e_i)}{\ln(N_i/N_{i+1})}, \quad EOC_i = \frac{\ln(e_{i+1}/e_i)}{\ln(M_i/M_{i+1})}$$

که EOC_i نرخ همگرایی، e_i خطا، $\Delta t = \frac{1}{N}$ و $h = \frac{b-a}{M}$ است. همان طور که در روش های طیفی رایج است، برای نشان دادن نرخ همگرایی روش پیشنهادی از نمودار با مقیاس لگاریتمی استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱: معادله دیفرانسیل کسری $(2) - (1)$ را با جواب دقیق زیر در نظر می گیریم:

$$u(x, t) = (1 - x)^2 \sin(2\pi x) \left(\frac{2t}{T}\right)^\alpha E_{1, \frac{\alpha}{2} + \theta + 1} \left(\frac{2t}{T}\right)$$

پارامترهای موجود در (۱) به صورت $\gamma = 1$ ، $\mu = 1$ و $T = 2$ انتخاب می شوند. جدول ۱ خطاها را برحسب نرم L^∞ و همچنین مرتبه همگرایی زمانی طرح پیشنهادی برای معادله کسری KdV را با نرم L^∞ برای برخی از مشتقات کسری نشان می دهد.

جدول ۱. همگرایی زمانی طرح پیشنهادی با نرم L^∞ برای برخی از مشتقات کسری در $t = 1$ و $M = 12$

	$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.7$	
N	Error	EOC	Error	EOC	Error	EOC
50	5.17E-07		5.58E-07		5.16E-07	
100	2.42E-07	1.0952	2.73E-07	1.0314	2.65E-07	0.9614
200	1.01E-07	1.2607	1.23E-07	1.1502	1.27E-07	1.0612
300	5.36E-08	1.5626	7.16E-08	1.3345	7.78E-08	1.2086
400	3.30E-08	1.6860	4.55E-08	1.5760	5.25E-08	1.3672

مثال ۲: معادله دیفرانسیل کسری $(2) - (1)$ را با جواب دقیق زیر در نظر می گیریم:

$$u(x, t) = (1 - x)^2 \sin(2\pi x) \left(\frac{2t}{T}\right)^\alpha E_{1, \frac{\alpha}{2} + \theta + 1} \left(\frac{2t}{T}\right)$$

پارامترهای موجود در (۱) به صورت $\gamma = 1$ ، $\mu = 1$ و $T = 2$ انتخاب می شوند. جدول ۲ خطاها را برحسب نرم L^∞ و مرتبه همگرایی مکانی طرح پیشنهادی برای معادله کسری KdV را با نرم L^∞ برای برخی از مشتقات کسری نشان می دهد.

جدول ۲. همگرایی مکانی طرح پیشنهادی با نرم L^∞ برای برخی مشتقات کسری در $t = 1$ و $N = 400$

	$\alpha=0.3$		$\alpha=0.5$		$\alpha=0.7$	
M	Error	EOC	Error	EOC	Error	EOC
4	7.25E-04		6.07E-04		5.08E-04	
6	3.63E-04	1.7061	3.03E-04	1.7136	2.53E-04	1.7192
8	3.12E-05	8.5302	2.61E-05	8.5226	2.18E-05	8.5215
10	1.48E-06	13.6611	1.25E-06	13.6181	1.05E-06	13.5927
12	3.30E-08	20.8603	4.55E-08	18.1722	5.25E-08	16.4310

نتیجه‌گیری

در این کار، ما یک روش کارآمد برای شبیه‌سازی عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با معرفی توابع پایه بر اساس چندجمله‌ای لژاندر ارائه کردیم. روش پیشنهادی منجر به یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد که آن را به صورت ماتریسی ارائه کردیم. با استفاده از این معادلات می‌توان حرکت اجسام مانند موشک‌ها، پهپادها و سیستم‌های پرتاب را مدل کرده و شبیه‌سازی کرد. این امر می‌تواند در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های دفاعی با قابلیت پیش‌بینی حرکت و سرعت اجسام استفاده شود. همچنین استفاده از این معادلات در مدل‌سازی سیستم‌های راداری و سنسوری می‌تواند به کاهش نویز، پیش‌بینی قابلیت‌های این سیستم‌ها و بهبود عملکرد آنها کمک کند. از نتایج عددی، مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی یک همگرایی مرتبه ثابت در زمان و یک همگرایی طیفی در مکان ارائه می‌کند.

مراجع

- Diethelm, K, The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, Springer, 2010.
- Farouki, R,T, The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective, Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(6), 379-419.
- Gupta, A, and S.S, Ray, On the solution of time-fractional KdV–Burgers equation using Petrov–Galerkin method for propagation of long wave in shallow water, Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 116, 376-380.
- He, J, H, Variational principle for the generalized KdV-burgers equation with fractal derivatives for shallow water waves. Journal of Applied and Computational Mechanics, 2020. 6(4), 735-740.
- Shen, J, T, Tang, and L.-L. Wang, Spectral methods: algorithms, analysis and applications, Springer, 2011.
- Yu, Z, J, Sun, and B, Wu, A space–time spectral Petrov–Galerkin method for nonlinear time fractional Korteweg–de Vries–Burgers equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(6), 4348-4365.
- Podlubny, I. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. ISSN. Elsevier Science, 1998.
- Dehghan, Mehdi and Abbaszadeh, Mostafa. An efficient technique based on finite difference/finite element method for solution of two-dimensional space/multi-time fractional Bloch–Torrey equations. Applied Numerical Mathematics, 131:190–206, 2018.
- Kevlahan NR, Khan R, Protas B. On the convergence of data assimilation for the one-dimensional shallow water equations with sparse observations. Advances in Computational Mathematics. 2019 Dec;45(5):3195-216.
- Khader MM, Saad KM, Hammouch Z, Baleanu D. A spectral collocation method for solving fractional KdV and KdV-Burgers equations with non-singular kernel derivatives. Applied Numerical Mathematics. 2021 Mar 1;161:137-46.
- Dehghan M, Abbaszadeh M. The use of proper orthogonal decomposition (POD) meshless RBF-FD technique to simulate the shallow water equations. Journal of Computational Physics. 2017 Dec 15;351:478-510.
- Caputo M, Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. Progress in Fractional Differentiation & Applications. 2015;1(2):73-85.