

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۹

پژوهشنامه علوم دفاعی، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۲

ص ص ۱۳۱ تا ۱۵۳

مدل‌های ماکزیمم آنتروپی دینامیکی و مدل‌های مینیمم اطلاع کولبک لیبر دینامیکی

حسین حضرتی^{۱*}

چکیده

جهت ساخت یک مدل برای توزیع داده‌های تولید شده بر اساس اطلاع جزئی، می‌توان از روش مشهور ماکزیمم آنتروپی (ME) استفاده نمود. در این مقاله نتایجی بیان می‌شود که بر اساس آن، ترتیب‌های آنتروپی دینامیکی و تابع مخاطره برای توزیع‌هایی با چگالی‌های یکنوا مرتبط می‌شوند. در فرایند ماکزیمم آنتروپی دینامیکی (MDE) مدل‌های طول عمر توسعه پیدا می‌کنند، به طوری که ممکن است به عنوان تعمیم فرایند ME هنگامی که اطلاع بر حسب قیدهای نامساوی رشد نرخ مخاطره مشخص می‌شود، در نظر گرفته شوند.

واژگان کلیدی: ماکزیمم آنتروپی، آنتروپی دینامیکی، نرخ مخاطره، مدل مینیمم اطلاع کولبک دینامیکی

۱. کارشناسی ارشد آمار و مدرس دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران. ایمیل: hoseinhazrati 2012@yahoo.com

مقدمه

فرض می‌کنیم، توزیع جامعه نامعلوم باشد. اطلاع جزئی در باره توزیع مولد داده‌ها بر حسب تعدادی از قیدهای اطلاع، فرمول بندی می‌شود و مدل با ماکزیمم کردن انتروپی شانون تحت این قیدها بدست می‌آید. اغلب در قابلیت اعتماد، مسأله مورد توجه، طول عمر فراتر از زمان t می‌باشد. در چنین مواردی توزیع مورد توجه برای محاسبه عدم قطعیت و اطلاع، توزیع باقیمانده می‌باشد. توابع اطلاع شامل یک توزیع طول عمر باقیمانده وابسته به زمان t بوده و بنابراین دینامیکی می‌باشند. مدل ماکزیمم انتروپی دینامیکی^۱ (MDE)، توزیعی با چگالی ای می‌باشد که انتروپی دینامیکی را برای هر t ماکزیمم می‌کند. کاربردهایی شامل ترتیب انتروپی دینامیکی درون تعدادی از خانواده‌های پارامتریک از توزیع‌ها، ترتیب‌هایی از توزیع‌های طول عمر سیستم‌ها و مؤلفه‌های آنها به طور سری و موازی، مقادیر رکورد و فرمول بندی قیدها برای مدل MDE بر حسب تابع مخاطره و تابع طول عمر باقیمانده را می‌توان بیان کرد. همچنین خانواده‌هایی از توزیع‌ها تعیین می‌شود که در آن تعدادی از توزیع‌های شناخته شده، مدل MDE می‌باشند.

مدل مینیمم اطلاع کولبک دینامیکی^۲ (MDDI) روشی است که برای مدل بندی احتمالاتی به کار می‌رود. مدل MDDI نسبت به یک توزیع مشخص G ، مدلی می‌باشد که در میان کل توزیع‌هایی که در تعدادی از قیدهای اطلاع بر حسب نامساوی گشتاوری باقیمانده، نامساوی رشد گشتاوری باقیمانده و یا نامساوی رشد نرخ مخاطره صدق می‌کنند، دارای حداقل تفاوت اطلاع کولبک لیبلر باشد.

در این مقاله مفاهیم زیر معرفی و مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۲ ترتیب انتروپی دینامیکی، در بخش ۳ توزیع ماکزیمم انتروپی دینامیکی، در بخش ۴ مدل‌های ماکزیمم انتروپی دینامیکی دو مؤلفه‌ای و در بخش ۵ مدل مینیمم اطلاع کولبک دینامیکی مورد توجه قرار می‌گیرند.

1. Maximum dynamic entropy

2. Minimum dynamic discrimination information

ترتیب آنتروپی دینامیکی

مدل MDE توزیعی با تابع چگالی $f^*(.)$ در یک مجموعه از توزیع‌های $\Omega_F = \{f(.)\}$ می‌باشد، به طوری که $H(f;t) \leq H(f^*;t); \forall t \geq 0$. به عبارت دیگر $f_t^*(x)$ ویژگی ME را در میان کل توزیع‌های طول عمر باقیمانده که با استفاده از تمام اعضای Ω_F استنتاج شده‌اند، حفظ می‌کند.

تشخیص بین ME و MDE قابل توجه می‌باشد. برای مثال، توزیع یکنواخت در یک مجموعه از کل توزیع‌ها بر روی یک فاصله متناهی $[0, \beta]$ ، ME می‌باشد. فرض کنید $f^*(.)$ نشان دهنده تابع چگالی یکنواخت بر روی $[0, \beta]$ باشد، در این صورت توزیع شرطی X به شرط $X > t$ نیز یکنواخت بر روی $(t, \beta]$ خواهد بود. بنابراین در هر نقطه t ، توزیع ME بر روی $(t, \beta]$ توزیع یکنواخت با تابع چگالی $f_t^*(x) = 1/(\beta - t)$ و $H(f^*;t) = \log(\beta - t)$ می‌باشد. به عبارت دیگر، هر تغییری در توزیع باقیمانده منجر به یک توزیع $f_t(.)$ بر روی $(t, \beta]$ می‌شود که دارای آنتروپی کوچکتری نسبت به $f_t^*(.)$ می‌باشد. بنابراین، بدون هر قید اطلاعی در $t = 0$ ، توزیع یکنواخت، یک توزیع ME و MDE می‌باشد، یعنی $H(f;t) \leq H(f^*;t) = \log(\beta - t); \forall t \geq 0$ ، اما این موضوع ممکن است برای توزیع‌های دیگر درست نباشد. برای مثال، توزیع ME بر روی فاصله $[0, \infty)$ با میانگین معلوم μ_0 ، توزیع نمایی $f_0^*(x) = \mu_0^{-1} e^{-x/\mu_0}$ می‌باشد. توزیع باقیمانده، توزیع نمایی بر روی (t, ∞) می‌باشد که ME نسبت به قید میانگین در زمان t می‌باشد. اما، اگر قیدهای گشتاوری برای فرایند باقیمانده تغییر کند، آنگاه ممکن است برای بعضی از $t > 0$ ، $H(f;t) > H(f_0^*;t)$. در عوض مدل MED تضمین می‌کند که $H(f;t) \leq H(f^*;t); \forall t \geq 0$.

قضیه زیر دارای کاربردهای گوناگونی می‌باشد و همچنین برای بدست آوردن مدل‌های MDE مختلف نیز به کار می‌رود.

قضیه ۱: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی پیوسته با توابع توزیع F و G ، توابع چگالی f و g و توابع مخاطره λ_F و λ_G (به ترتیب) باشند. فرض کنید که، $\lambda_F(t) \leq \lambda_G(t); t \geq 0$. آنگاه الف) $H(f;t) \leq H(g;t)$ اگر $f(x)$ برای هر $x \geq 0$ نزولی باشد.

ب) $H(f;t) \geq H(g;t)$ اگر $f(x)$ برای هر x بر روی تکیه گاهش، $0 \leq x \leq \beta$ صعودی باشد.

اثبات: فرض کنید X_t و Y_t نشان دهنده طول عمر باقیمانده با توابع چگالی f_t و g_t (به ترتیب) باشند، با توجه به اینکه $\lambda_F(t) \leq \lambda_G(t)$ داریم: $(X_t \geq Y_t)^{st}$. همچنین، از آنجاییکه $f_t(x)$ نسبت به x نزولی می باشد، رابطه زیر بدست می آید.

$$E_{f_t}[\log f_t(X)] \leq E_{g_t}[\log f_t(Y)]. \quad (۱)$$

اطلاع کولبک لیبلر را بین دو توزیع طول عمر باقیمانده به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} K(g_t; f_t) &= \int_t^\infty g_t(x) \log \frac{g_t(x)}{f_t(x)} dx \\ &= -H(g;t) - \int_t^\infty g_t(x) \log f_t(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم: $H(f;t) \geq -\int_t^\infty g_t(x) \log f_t(x) dx \geq H(g;t)$.

برای اثبات قسمت (ب) فرض کنید $g(t)$ صعودی باشد. با استفاده از بحثی شبیه بالا داریم: $E_{f_t}[\log g_t(X)] \geq E_{g_t}[\log g_t(Y)]$. با توجه به آن و رابطه $K(g_t; f_t) \geq 0$ نتیجه بدست می آید.

• فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی نامنفی پیوسته با توابع چگالی f و g باشند که در آن g یک توزیع وزنی از f می باشد. اگر $w(x) \geq A(x)$ باشد، آنگاه

الف) $H(f;t) \leq H(g;t)$ اگر $f(x)$ برای هر $x \geq 0$ نزولی باشد.

ب) $H(f;t) \geq H(g;t)$ اگر $f(x)$ برای هر x بر روی تکیه گاهش، $0 \leq x \leq \beta$ صعودی باشد.

مثال های زیر کاربردهایی از قضیه (۱) را ارائه می دهند.

مثال ۱: (سیستمی از مؤلفه ها) فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ بیانگر طول عمرهای هم توزیع و مستقل از مؤلفه های یک سیستم و دارای تابع چگالی مشترک f و تابع توزیع F باشند.

الف) طول عمر یک سیستم سری با n مؤلفه به صورت $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ تعیین می شود. اگر Y دارای تابع چگالی g و تابع توزیع G باشد، آنگاه با توجه به این که تابع مخاطره k امین آماره مرتب به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_{F_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \lambda_F(x) \frac{[F(x)/\bar{F}(x)]^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} [F(x)/\bar{F}(x)]^i}$$

نتیجه می شود که $\lambda_G(t) = n\lambda_F(t) \geq \lambda_F(t)$. بنابراین، اگر تابع چگالی $f(\cdot)$ تابعی صعودی باشد، آنگاه $H(f;t) \geq H(g;t)$ و اگر تابع چگالی $f(\cdot)$ تابعی نزولی باشد، آنگاه $H(f;t) \leq H(g;t)$.

ب) طول عمر یک سیستم موازی با n مؤلفه به صورت $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ تعیین می شود. اگر Z دارای تابع چگالی g و تابع توزیع G باشد. آنگاه با توجه به این که $\lambda_G(t) = \theta(t)\lambda_F(t)$ ، که در آن

$$\theta(t) = \frac{n[F(t)/\bar{F}(t)]^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} [F(t)/\bar{F}(t)]^i} \leq 1.$$

در این مورد، $\lambda_G(t) \leq \lambda_F(t)$. بنابراین، اگر تابع چگالی $f(\cdot)$ تابعی صعودی باشد، آنگاه $H(f;t) \leq H(g;t)$ و اگر تابع چگالی $g(\cdot)$ تابعی نزولی باشد، آنگاه $H(f;t) \geq H(g;t)$.

مثال ۲: (مقادیر رکورد) فرض کنید $\{X_n; n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی (iid) با تابع مشترک f و تابع توزیع F باشند. اگر n امین رکورد بالا، V ، دارای تابع چگالی g و تابع توزیع G باشد. در این صورت:

با $\Lambda_F(v) = -\log \bar{F}(v)$ که در آن $g(v) = \frac{[-\ln \bar{F}(v)]^{n-1}}{(n-1)!} f(v)$ و $P(V > v) = \bar{F}(v) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(v)]^k$ ترکیب این دو معادله، تابع مخاطره V به صورت $\lambda_G(t) = \theta(t)\lambda_F(t)$ بدست می آید که در آن

$$\theta(t) = \frac{[\Lambda_F(t)]^{n-1} / (n-1)!}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^k} \leq 1.$$

در نتیجه $\lambda_G(t) \leq \lambda_F(t)$. بنابراین، اگر تابع چگالی $f(\cdot)$ تابعی صعودی باشد، آنگاه $H(f;t) \geq H(g;t)$. اگر تابع چگالی $g(\cdot)$ تابعی نزولی باشد، آنگاه $H(f;t) \leq H(g;t)$.

مثال ۳: (متغیر اندازه-اریب) فرض کنید که X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع چگالی f ، تابع توزیع F و میانگین متناهی باشد. در این صورت تابع چگالی زیر یک توزیع وزنی از X با تابع وزنی $w(x) = x$ می باشد که توزیع اریب-اندازه نامیده می شود.

$$g(y) = \frac{yf(y)}{E(X)}; y \geq 0$$

اگر W متغیر تصادفی وزنی باشد. در این صورت

$$\lambda_G(t) = \frac{t}{1 + \delta_F(t)} \lambda_F(t), t \geq 0,$$

از آنجایی که $\lambda_G(t) \leq \lambda_F(t)$ ، بنابراین، اگر تابع چگالی $f(\cdot)$ تابعی صعودی باشد، آنگاه $H(f;t) \geq H(g;t)$ و اگر تابع چگالی $g(\cdot)$ تابعی نزولی باشد، آنگاه $H(f;t) \leq H(g;t)$.

مثال ۴: (ترتیب درون خانواده های پارامتریک) تعدادی از خانواده های پارامتریک از توزیع ها دارای توابع چگالی های یکنوا می باشند. جدول های (۱) و (۲) در انتهای مقاله چندین خانواده پارامتریک را نشان می دهند. درون هر خانواده، توزیع ها با استفاده از $H(f^*;t)$ بر حسب پارامترها مرتب شده اند. برای بعضی از این توزیع ها، $H(f^*;t)$ در یک فرم بسته محاسبه می شوند، بنابراین، ترتیب ها به طور مستقیم بدست می آیند. برای مثال، $H(f^*;t)$ بر حسب پارامتر یکنواخت و در پارامتر α توزیع پارتو صعودی می باشد. همینطور $H(f^*;t)$ در پارامتر نمایی نزولی می باشد. ترتیب ها برای توزیع های دیگر با استفاده از قضیه (۱) بدست می آید. برای مثال برای توزیع نرخ خرابی خطی^۱، $H(f^*;t)$ نسبت به هردو پارامتر صعودی می باشد، برای توزیع های وایبل و لجستیک ناقص، $H(f^*;t)$ نزولی در α ، و برای توزیع گاما $H(f^*;t)$ صعودی در α می باشد. توابع

^۱-Linear-rate distribution

چگالی بتای موجود در جدول (۱)، برای $\alpha < 1, \beta > 1$ نزولی و برای $\alpha > 1, \beta < 1$ صعودی می باشد. بنا براین، $H(f^*; t)$ نزولی در α و صعودی در β می باشد.

توزیع ماکزیمم آنتروپی دینامیکی

برای هر تابع توزیع F ، رشد نسبی تابع مخاطره به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} + \lambda_F(t) \quad (2)$$

برای هر توزیع با تابع چگالی نزولی $f^*(.)$ ، می توان یک مجموعه از توزیع های $\Omega_F = \{f(.)\}$ را مشخص کرد به طوری که

$$\frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \frac{\lambda'_{F^*}(t)}{\lambda_{F^*}(t)} \quad (3)$$

که سمت راست نامساوی بالا با استفاده از رابطه (۲) مشخص می شود. جواب نامساوی (۳) با در نظر گرفتن شرایط اولیه، $\lambda_{F^*}(t)$ را به گونه ای مشخص می کند که به وسیله $\lambda_F(t)$ برای کل توزیع ها در Ω_F مغلوب می شود. بنابراین، با استفاده از قضیه (۱)، $H(f^*; t)$ بر $H(f; t)$ غلبه می کند. این یک فرایند کلی ای می باشد که می تواند جهت مشخص کردن یک مجموعه از توزیع ها که در آن یک $f^*(.)$ مشخص، مدل MDE می باشد، مورد استفاده قرار گیرد. برای توزیع هایی با تابع چگالی های صعودی، نامساوی (۳) برعکس می شود. همچنین یک مجموعه از توزیع ها را به وسیله قیدهای نامساوی بسط داده شده با استفاده از رشد نسبی میانگین طول عمر باقیمانده $\delta_F(t)$ ، به صورت زیر می توان تعریف کرد.

$$\frac{\delta'_F(t)+1}{\delta_F(t)} = \lambda_F(t).$$

جدول های (۱) و (۲) قیدهایی را که مجموعه های ماکسیمال از توزیع های Ω_F تعریف می کند، نمایش می دهد که در آن تعدادی از توزیع های شناخته شده، MDE می باشد. قیود برای توزیع های نمایی و نرخ خرابی خطی برحسب نرخ رشد تابع مخاطره می باشد. برای بقیه توزیع های موجود

در جدول (۱) قیدها بر حسب نرخ نسبی رشد تابع مخاطره می‌باشند. برای توزیع مقدار نهایی، قیدهای نامساوی نشان داده در جدول (۱) به قید خمیدگی مشهور هستند.

قضیه ۲: توزیع نمایی، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(x)$ بر روی تکیه‌گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می‌کند، می‌باشد.

$$\lambda_F(0) = \beta \quad (\text{الف})$$

$$\lambda'_F(t) \geq 0 \quad (\text{ب})$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می‌آوریم:

$$\lambda_F(t) \geq -\beta = \lambda_{F^*}(t) \quad \text{که در آن } \lambda_F(t) \text{ تابع مخاطره توزیع } F \text{ و با استفاده از رابطه}$$

$$\bar{F}^*(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda_{F^*}(t) dt\right) \quad (۴)$$

بدست می‌آید که $\lambda_F^*(t)$ تابع مخاطره توزیع نمایی با تابع چگالی موجود در جدول (۱) می‌باشد. تابع چگالی f^* تابعی نزولی می‌باشد، با استفاده از قضیه (۱) نتیجه می‌شود که $H(f; t) \leq H(f^*; t)$. برای توزیع‌های نرخ خرابی و مقدار نهایی نیز به همین روش عمل می‌شود.

قضیه ۳: توزیع پارتو، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(x)$ بر روی تکیه‌گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می‌کند، می‌باشد.

$$\lambda_F(0) = \lambda_0 \quad (\text{الف})$$

$$\lambda'_F(t) / \lambda_F(t) \geq -\frac{\beta}{\beta+1} \lambda_F(t) \quad \text{که در آن } \alpha, \beta > 0 \quad \lambda_0 = \frac{\beta+1}{\alpha} \text{ می‌باشد.} \quad (\text{ب})$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می‌آوریم:

$$\lambda_F(t) \geq \frac{\beta+1}{\alpha+\beta t} = \lambda_{F^*}(t) \quad \text{که در آن } \lambda_F(t) \text{ تابع مخاطره توزیع } F \text{ و با استفاده از رابطه (۴) بدست}$$

می‌آید که $\lambda_F^*(t)$ تابع مخاطره توزیع پارتو تعمیم یافته با تابع چگالی موجود در جدول (۱)

می باشد. تابع مخاطره به طور یکنواخت به و سیله کل توزیع‌هایی که در شرایط قضیه (۳) صدق می کنند، مغلوب می شود. چگالی f^* تابعی نزولی می باشد، بنابراین با استفاده از قضیه (۱) نتیجه می شود که $H(f;t) \leq H(f^*;t)$.

خانواده پارتو تعمیم یافته شامل توزیع پارتو هنگامی که $\beta > 1$ ، توزیع توانی هنگامی که $-1 < \beta < 1$ و توزیع نمایی هنگامی که $\beta \rightarrow 0$ می باشد.

مجموعه‌ای از توزیع‌ها برای پارتو تعمیم یافته برحسب تابع میانگین باقیمانده $\delta_F(t)$ به صورت $\delta_F(t) \leq \alpha + \beta t$; $\alpha, \beta > 0$ و $\delta'_F(t)/\delta_F(t) \geq \frac{\beta}{\alpha + \beta t}$ می باشد. از این دو شرط بدست می آید که $\lambda_F(t) = (\delta'_F(t) + 1)/\delta_F(t) \geq \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta t} = \lambda_{F^*}(t)$.

قضیه ۴: توزیع بتا، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(\cdot)$ بر روی تکیه گاه $[0,1]$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(0) = \beta$$

$$\text{ب) } \lambda'_F(t)/\lambda_F(t) \geq \frac{1}{\beta} \lambda_F(t); \beta \leq 1$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می آوریم: $\lambda_F(t) \geq \frac{\beta}{1-t} = \lambda_{F^*}(t)$ با استدلالی مشابه قضیه (۳) نتیجه می شود که $H(f;t) \leq H(f^*;t)$. برای حالت $\beta \geq 1$ و قید مربوطه به طور مشابه نتیجه بدست می آید.

در جدول (۲) مجموعه‌های ماکسیمال برای تعدادی دیگر از توزیع‌ها نشان داده شده است. توزیع‌های گاما و وایبل شامل یک تغییر مکانی به جهت اجتناب از نقطه منفرد $t=0$ می باشند. برای توزیع بتا موجود در جدول (۲)، نامساوی مشتق، رشد نسبی $\rho_F(t) = t\lambda_F(t)$ را توصیف می کند به دلیل این که قید بر حسب $\lambda_F(t)$ پیچیده می باشد و به آسانی قابل تفسیر نمی باشد. سمت راست نامساوی‌های موجود در جدول (۲) به شکل $u(t)$ برای وایبل، $u(t)\lambda_F(t)$ برای توزیع کوشی ناقص، و $u(t)\rho_F(t)$ برای توزیع بتا می باشد. بنابراین، کران‌های مجموعه ماکسیمال برای این

توزیع‌ها با استفاده از معادلات مشتقی توصیف شده است که دارای ضرایب متغیری می‌باشند. سمت راست قیده‌های نامساوی برای توزیع لجستیک ناقص به فرم $\lambda_F(t) + c$ می‌باشد که c یک ثابت است. قیده‌ها برای توزیع‌های نرمال ناقص و گاما پیچیده تر و به فرم $\nu(t) + \lambda_{F^*}(t)$ می‌باشد، که $\lambda_{F^*}(t)$ تابع مخاطره توزیع‌های نرمال ناقص و گاما می‌باشد.

قضیه ۵: توزیع وایبل، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(x)$ بر روی تکیه‌گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می‌کند، می‌باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(0) = \lambda_0$$

$$\text{ب) } \lambda'_F(t) / \lambda_F(t) \geq -\frac{\alpha-1}{x_0+t} \text{ که در آن } \lambda_0 = \alpha x_0^{\alpha-1} \text{ می‌باشد.}$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می‌آوریم:
 $\lambda_F(t) \geq \alpha(x_0+t)^{\alpha-1} = \lambda_{F^*}(t)$ با استدلالی مشابه قضیه (۳) نتیجه می‌شود که $H(f;t) \leq H(f^*;t)$.

قضیه ۶: توزیع کوشی ناقص، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(\cdot)$ بر روی تکیه‌گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می‌کند، می‌باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(0) = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{ب) } \lambda'_F(t) / \lambda_F(t) \geq (1 - 2t \arctan t^{-1}) \lambda_F(t)$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می‌آوریم:
 $\lambda_F(t) \geq 1/(2t \arctan t + \frac{\pi}{2} - 1) = \lambda_{F^*}(t)$ با استدلالی مشابه قضیه (۳) نتیجه می‌شود که
 $H(f;t) \leq H(f^*;t)$

قضیه ۷: توزیع بتا، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(x)$ بر روی تکیه گاه $[0,1]$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\lambda_F(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\rho'_F(t) / \alpha + \rho_F(t) \geq t^{\alpha-1} [\alpha + \rho_F(t)]; \alpha \leq 1 \quad (\text{ب})$$

اثبات: با انتگرال گیری از رابطه (ب) و با استفاده از شرط (الف) بدست می آوریم:

$$\lambda_F(t) \geq \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{1-t^\alpha} = \lambda_{F^*}(t) \quad \text{با استدلالی مشابه قضیه (۳) نتیجه می شود که } H(f;t) \leq H(f^*;t). \text{ برای حالت } \alpha \geq 1 \text{ و قید مربوطه به طور مشابه نتیجه بدست می آید.}$$

قضیه ۸: توزیع کوشی لجستیک ناقص، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(x)$ بر روی تکیه گاه $[0,\infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\lambda_F(0) = \lambda_0 \quad (\text{الف})$$

$$\lambda'_F(t) / \lambda_F(t) \geq \beta - \lambda_F(t) \geq 0 \quad \text{که در آن } \lambda_0 = \frac{\beta}{\alpha+1}; \alpha, \beta > 0 \text{ می باشد.} \quad (\text{ب})$$

اثبات: از شرط (ب) بدست می آید که $\frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)(\beta - \lambda_F(t))} \geq 1$. با ضرب طرفین نامساوی در β و تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{\beta \lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)(\beta - \lambda_F(t))} \geq \frac{\lambda'_F(t)}{\beta - \lambda_F(t)} + \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \beta$$

با انتگرال گیری از طرفین و به کار بردن شرایط اولیه عبارت زیر بدست می آید:

$$\lambda_F(t) \geq \frac{\beta e^{\beta t}}{\alpha + e^{\beta t}} = \lambda_{F^*}(t)$$

که در آن $\alpha = \beta/\lambda_0 - 1 \geq 0$ و $\lambda_{F^*}(t)$ تابع مخاطره توزیع لجستیک ناقص با تابع چگالی موجود در جدول (۲) می باشد. با توجه به این که این تابع چگالی نزولی می باشد و با استفاده از قضیه (۱) داریم: $H(f;t) \leq H(f^*;t)$. اگر $\lambda_0 = \beta$ و $\alpha = 0$ ، مدل MDE نمایی می باشد.

قضیه ۹: توزیع نرمال ناقص، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(\cdot)$ بر روی تکیه گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(0) = \sqrt{2/\pi}$$

ب) $\lambda'_F(t)/\lambda_F(t) \geq \lambda_{F^*}(t) - t$ که در آن $\lambda_{F^*}(t)$ تابع مخاطره توزیع نرمال ناقص می باشد.

اثبات: با انتگرال گیری از شرط (ب) از t تا ∞ خواهیم داشت $\log \lambda_F(t) \geq \log F^* - \frac{1}{2}t^2 + c$. با به کار بردن شرایط اولیه عبارت زیر بدست می آید:

$$\lambda_F(t) \geq \frac{\sqrt{2/\pi} e^{-(1/2)t^2}}{F^*(t)} = \lambda_{F^*}(t)$$

$\lambda_{F^*}(t)$ تابع مخاطره نرمال ناقص با تابع چگالی موجود در جدول (۲) می باشد. با توجه به این که این تابع چگالی نزولی می باشد و با استفاده از قضیه (۱) داریم: $H(f;t) \leq H(f^*;t)$. اثبات برای توزیع گاما به طور مشابه می باشد.

۴- مدل های ماکزیمم انتروپی دینامیکی دو مؤلفه ای

مدل هایی شامل بیش از یک مؤلفه در مسائل مختلفی در علوم کاربردی رخ می دهند. برای مثال توزیع مینیمم یک مجموعه از مؤلفه ها در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا بسیار مورد توجه هستند و مدل های ترکیبی در زمینه های گوناگون بسیار به کار می روند.

در جدول (۳) چهار مثال از مدل هایی که شامل دو مؤلفه می باشند، نشان داده شده است.

قضیه ۱۰: ترکیبی از دو توزیع نمایی، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(\cdot)$ بر روی تکیه گاه $[0, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(0) = \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2; 0 < \alpha < 1, \beta_1 \geq \beta_2 > 0$$

$$\text{ب) } \beta_2 \leq \lambda_F(t) \leq \beta_1$$

$$\text{ج) } \lambda'_F(t)/(\lambda_F(t) - \beta_2) \geq \lambda_F(t) - \beta_1$$

اثبات: دو طرف رابطه (ج) را در $\beta_1 - \beta_2$ ضرب کرده و با استفاده از تجزیه کسرها عبارت زیر بدست می آید.

$$-\frac{\lambda'_F(t)}{\beta_1 - \lambda_F(t)} - \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t) - \beta_2} \leq \beta_1 - \beta_2$$

با انتگرال گیری از دو طرف و با استفاده از شرایط اولیه (الف) بدست می آید که

$$\lambda_F(t) \geq \frac{\alpha\beta_1 e^{\beta_1 t} + (1-\alpha)\beta_2 e^{-\beta_2 t}}{\alpha e^{-\beta_1 t} + (1-\alpha)e^{\beta_2 t}} = \lambda_{F^*}(t),$$

که در آن $\lambda_{F^*}(t)$ تابع مخاطره ترکیب دو توزیع نمایی با تابع چگالی موجود در جدول (۳) می باشد. بنابراین، با توجه به این که این تابع چگالی نزولی می باشد و با استفاده از قضیه (۱) داریم: $H(f; t) \leq H(f^*; t)$.

قضیه ۱۱: ترکیبی از دو توزیع پارتو، مدل MDE در یک مجموعه از توزیع های Ω_F با تابع چگالی مشتق پذیر $f(\cdot)$ بر روی تکیه گاه $[1, \infty)$ و تابع مخاطره $\lambda_F(t)$ ، که در شرایط زیر صدق می کند، می باشد.

$$\text{الف) } \lambda_F(1) = \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2; 0 < \alpha < 1, \beta_1 \geq \beta_2 > 0$$

$$\text{ب) } \beta_2 \leq \lambda_F(t) \leq \beta_1, \rho_F(t) = t\lambda_F(t)$$

$$\text{ج) } t\rho'_F(t)/(\rho_F(t) - \beta_2) \geq \rho_F(t) - \beta_1$$

اثبات: مشابه قضیه (۱۰) می باشد.

۵- مدل مینیمم اطلاع کولبک دینامیکی

یک مجموعه از توزیع های $\Omega_F = \{f(\cdot)\}$ را که در آن F کاملاً پیوسته می باشد، نسبت به یک توزیع منبع G با تابع چگالی g در نظر بگیرید. مدل MDDI در Ω_F نسبت به F^*, G با تابع چگالی f^* می باشد به طوری که

$$D(f^* : g; t) \leq D(f : g; t); \forall t \geq 0,$$

به عبارت دیگر مدل MDDI $F^* \in \Omega_F$ مدلی می باشد که $f^*(x; t)$ تابع چگالی باقیمانده آن، ویژگی MDI رادر میان کل تابع چگالی های باقیمانده $f(x; t)$ که با استفاده از تمام اعضای Ω_F استنتاج شده اند، حفظ می کند.

قضیه ۱۲: فرض کنید $\Omega_F = \{F : \delta_F(t) \leq (\geq) q(t)\}$ یک مجموعه فشرده از توزیع ها باشد که کاملاً پیوسته نسبت به توزیع منبع G باشد. همچنین فرض کنید $F^* \in \Omega_F$ به طوری که $\delta_{F^*}(t) = q(t)$ اگر $\log \frac{f^*(x)}{g(x)}$ نزولی و مقعر (صعودی و محدب) باشد، آنگاه F^* توزیع MDDI نسبت به G می باشد.

اثبات: حالت $\mu_F(t) \leq q(t)$ را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} D(f : g; t) &= \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f(x; t)}{g(x; t)} dx \\ &= \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f^*(x; t)}{g(x; t)} dx + \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f(x; t)}{f^*(x; t)} dx \\ &\geq \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f^*(x; t)}{g(x; t)} dx \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} D(f : g; t) - D(f^* : g; t) &\geq \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f^*(x; t)}{g(x; t)} dx - \int_t^\infty f^*(x; t) \log \frac{f^*(x; t)}{g(x; t)} dx \\ &= \int_t^\infty f(x; t) \log \frac{f^*(x)}{g(x)} dx - \int_t^\infty f^*(x; t) \log \frac{f^*(x)}{g(x)} dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

هنگامی که G دارای یک تابع چگالی یکنواخت بر روی $\{x: 0 < x < b\}$ باشد، تابع چگالی طول عمر باقیمانده $g(x; t)$ یکنواخت بر روی $\{x: t < x < b\}$ می‌باشد و MDDI تبدیل به MDE می‌شود. مدل MDE در یک مجموعه از توزیع‌های $\Omega_F = \{F\}$ ، توزیعی با تابع چگالی $f^*(x)$ می‌باشد به طوری که برای هر $H(f; t) \leq H(f^*; t)$ ، $t \geq 0$.

قضیه ۱۳: فرض کنید $\Omega_F = \{F : \mu_F(t) \leq (\geq) q(t)\}$ یک مجموعه فشرده از توزیع‌های کاملاً پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $F^* \in \Omega_F$ به گونه ای باشد که $\mu_{F^*}(t) = q(t)$. اگر $f^*(x)$ صعودی و لگ-محدب (نزولی و لگ-مقعر) باشد، آنگاه F^* توزیع MDE می‌باشد.

کاربرد نتایج بالا شامل مشخص کردن کلاسی از توزیع‌ها براساس قیده‌های نامساوی باقیمانده میانگین می‌باشد که در آن مدل‌های خوش تعریف، MDDI و یا MDE می‌باشند، و یکی دیگر از کاربردها، بسط مدل MDDI و MDE برای کلاسی از توزیع‌ها می‌باشد که در آن توابع میانگین باقیمانده با استفاده از تابع مشخص $q(t)$ کراندار (از بالا یا پایین) می‌باشد. هر تابع پیوسته $q(t)$ با ویژگی‌های زیر، یک تابع میانگین باقیمانده از یک تابع توزیع F می‌باشد:

$$0 \leq q(t) < \infty \quad (5)$$

$$q(0) > 0 \quad (6)$$

$$q'(t) + 1 > 0 \quad (7)$$

$$\begin{cases} \text{If } q(t) = 0 \text{ for some } t_0, \text{ then } q(t) = 0 \text{ for all } t \geq t_0 \\ \text{If } q(t) > 0 \text{ for all } t > 0, \text{ then } \int_0^\infty \frac{1}{q(t)} dt = \infty. \end{cases} \quad (8)$$

برای هرتابعی که در روابط (۵) تا (۸) صدق کند، می توان یک توزیع منحصر به فرد پیدا کرد. آنگاه برای هر توزیع منبع، می توان شرایط قضیه (۱۱) را با استفاده از مقایسه مشتق اول و دوم توابع چگالی مورد بررسی قرار داد: $\frac{f(x)}{g(x)}$ صعودی (نزولی) می باشد اگر

$$\frac{d \log f(x)}{dx} \geq (\leq) \frac{d \log g(x)}{dx} \quad (9)$$

و $\frac{f(x)}{g(x)}$ محدب (مقعر) می باشد اگر

$$\frac{d^2 \log f(x)}{dx^2} \geq (\leq) \frac{d^2 \log g(x)}{dx^2} \quad (10)$$

برای شرایط قضیه (۱۳) سمت راست هردو رابطه (۹) و (۱۰) باید صفر باشد.

انتخاب معمول برای توزیع منبع در تحلیل طول عمر، توزیع نمایی با تابع چگالی زیر می باشد.

$$g(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0 \quad (11)$$

برای منبع نمایی، سمت راست رابطه (۹) باید $-\lambda$ و سمت راست رابطه (۱۰) باید صفر باشد. به عبارت دیگر $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ مقعر (محدب) می باشد اگر $f(x)$ لگ- مقعر (محدب) باشد، علاوه بر آن $K(f; g_e)$ خوش تعریف می باشد اگر F دارای تکیه گاه مثبت، انتروپی متناهی و میانگین متناهی باشد. این شرایط برای تمام توزیع های معرفی شده در این فصل برقرار می باشد.

مثال ۵: در این مثال چندین کاربرد از نتایج بالا را نشان داده می شود.

(۱) فرض کنید که برای هر t ، $q(t) = \mu$ باشد. $q(t)$ در روابط (۵) تا (۸) صدق می کند. آنگاه با استفاده از رابطه

$$\bar{F}(t) = \frac{\delta_F(0)}{\delta_F(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{\mu_F(x)} dx \right\} \quad (12)$$

توزیع نمایی با تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$ بدست می آید. تابع چگالی نمایی نزولی و لگ- مقعر

می باشد. با استفاده از قضیه (۳)، توزیع نمایی، مدل MDE در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) \leq \mu$ می باشد.

(۲) فرض کنید که برای هر $\alpha, \beta > 0, t < \infty$ ، داشته باشیم $q(t) = \beta + \alpha t$ و $q(\infty) = 0$ و $q(t)$ در روابط (۵) تا (۸) صدق می کند. آنگاه با استفاده از رابطه (۱۲) توزیع پارتو تعمیم یافته با تابع چگالی موجود در جدول (۴) بدست می آید. تابع چگالی توزیع پارتو تعمیم یافته نزولی و لگ-محدب می باشد، بنابراین قضیه (۱۳) را نمی توان به کاربرد. اما برای منبع نمایی موجود در رابطه (۱۱)، هنگامی که $\lambda \geq (2\alpha + 1)/\beta$ ، $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ نزولی و محدب می باشد. با استفاده از قضیه (۱۲)، در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) \geq \beta + \alpha t$ ، توزیع پارتو تعمیم یافته، MDDI نسبت به توزیع نمایی با $\lambda \geq (2\alpha + 1)/\beta$ می باشد.

(۳) فرض کنید که $q(t) = \alpha/(\beta + t)$ و $q(t)$ در روابط (۵)، (۶) و (۸) هنگامی که $\alpha, \beta > 0$ ، و در شرط $q'(t) + 1 = (-\alpha/(\beta + t)^2) + 1 > 0$ اگر $\beta^2 \geq \alpha$ صدق کند. آنگاه با استفاده از رابطه (۱۲) توزیع تابع چگالی موجود در جدول (۴) به دست می آید. این تابع چگالی هنگامی که $\beta^2 \geq 3\alpha$ ، لگ-مقعر می باشد.

الف) اگر $\beta^2 \geq 3\alpha$ این تابع چگالی نزولی می باشد. با استفاده از قضیه (۱۲) توزیع ترکیب نرمال تعمیم یافته، مدل MDE در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \alpha/(\beta + t)$ می باشد.

ب) برای منبع نمایی موجود در رابطه (۱۱)، هنگامی که $\lambda \leq \beta(\beta^2 - 3\alpha)/[\alpha(\beta^2 - \alpha)]$ ، $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ نزولی و مقعر می باشد. با استفاده از قضیه (۱۲)، در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \alpha/(\beta + t)$ ، این تابع چگالی، MDDI نسبت به توزیع نمایی با $\lambda \leq \beta(\beta^2 - 3\alpha)/[\alpha(\beta^2 - \alpha)]$ می باشد.

(۴) فرض کنید که $q(t) = \alpha e^{-\beta t}$ و $q(t)$ در روابط (۵)، (۶) و (۸) هنگامی که $\alpha, \beta > 0$ و در شرط $q'(t) + 1 = (-\alpha\beta e^{-\beta t}) + 1 > 0$ اگر $\alpha\beta < 1$ کند. آنگاه با استفاده از رابطه (۱۲) توزیع تابع چگالی موجود در جدول (۴) به دست می‌آید. این تابع چگالی هنگامی که $\beta^2 \geq 3\alpha$ ، لگ-مقعر می‌باشد.

الف) اگر $\alpha\beta \leq (3 - \sqrt{5})/2$ این تابع چگالی نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱۳) این تابع چگالی مدل MDE در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \alpha e^{-\beta t}$ می‌باشد.

ب) برای منبع‌نمایی موجود در رابطه (۱۱)، هنگامی که $\lambda \leq [(1 - \alpha\beta)^2 - \alpha\beta] / \alpha(1 - \alpha\beta)$ ، $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱۲)، در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \alpha e^{-\beta t}$ ، این تابع چگالی، MDDI نسبت به توزیع‌نمایی با $\lambda \leq [(1 - \alpha\beta)^2 - \alpha\beta] / \alpha(1 - \alpha\beta)$ می‌باشد.

(۵) فرض کنید که $q(t) = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha + e^{\beta t}) \log(1 + \alpha e^{-\beta t})$ و $q(t)$ در روابط (۵) تا (۸) هنگامی که $\alpha, \beta > 0$ ، صدق می‌کند. آنگاه با استفاده از رابطه (۱۲) توزیع تابع چگالی موجود در جدول (۴) بدست می‌آید. این تابع چگالی لگ-مقعر می‌باشد.

الف) اگر $\alpha \leq 1$ این تابع چگالی نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱۳) این تابع چگالی مدل MDE در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha + e^{\beta t}) \log(1 + \alpha e^{-\beta t})$ می‌باشد.

ب) برای منبع‌نمایی موجود در رابطه (۱۱)، هنگامی که $\lambda \leq \beta(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ ، $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ نزولی می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱۲)، در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \alpha e^{-\beta t}$ ، این تابع چگالی، MDDI نسبت به توزیع‌نمایی با $\lambda \leq \beta(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ می‌باشد.

(۶) فرض کنید که $q(t) = \frac{\alpha\beta_1^{-1}e^{-\beta_1 t} + (1 - \alpha)\beta_2^{-1}e^{-\beta_2 t}}{\alpha e^{-\beta_1 t} + (1 - \alpha)e^{-\beta_2 t}}$ و $q(t)$ در روابط (۵) تا (۸) صدق می‌کند. آنگاه با استفاده از رابطه (۱۲) توزیع تابع چگالی موجود در جدول (۴) بدست می‌آید. این تابع چگالی نزولی و لگ-محدب می‌باشد، بنابراین قضیه (۱۳) را نمی‌توان به کاربرد. اما برای منبع‌نمایی

موجود در رابطه (۱۱)، هنگامی که $\lambda \geq \max\{\beta_1, \beta_2\}$ ، $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ صعودی و محدب می‌باشد. با استفاده از قضیه (۱۲)، در خانواده توزیع‌هایی با میانگین باقیمانده $\delta_F(t) = \frac{\alpha\beta_1^{-1}e^{-\beta_1 t} + (1-\alpha)\beta_2^{-1}e^{-\beta_2 t}}{\alpha e^{-\beta_1 t} + (1-\alpha)e^{-\beta_2 t}}$ ، این تابع چگالی، MDDI نسبت به توزیع نمایی با $\lambda \geq \max\{\beta_1, \beta_2\}$ می‌باشد.

(۷) توزیع نمایی MDDI نسبت به کل توزیع‌های موجود در جدول (۴) می‌باشد در صورتی که $\log \frac{f(x)}{g_e(x)}$ نزولی و مقعر (صعودی و محدب) باشد، آنگاه $\log \frac{g_e(x)}{f(x)}$ صعودی و محدب (نزولی و مقعر) می‌باشد.

الف) در خانواده توزیع‌های $\Omega_F = \{F: \delta_F(t) \geq \mu\}$ ، توزیع نمایی MDDI نسبت به GP و ترکیب دو توزیع نمایی موجود در جدول (۴) می‌باشد.

ب) در خانواده توزیع‌های $\Omega_F = \{F: \delta_F(t) \leq \mu\}$ ، توزیع نمایی MDDI نسبت به ترکیب نرمال تعمیم یافته، ترکیب مقدار نهایی نوع I و توزیع لجستیک ناقص موجود در جدول (۴) می‌باشد.

جدول ۱: توزیع‌های ماکزیمم انتروپی دینامیکی

چگالی MDE	قیود برای مجموعه ماکسیمال
$Uniform, [0, \beta]$ $f^*(x) = \frac{1}{\beta}$	-----
$Exponential, [0, \infty)$ $f^*(x) = \beta e^{-\beta x}, x \geq 0, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \beta \\ \lambda'_F(t) \geq 0 \end{cases}$

<i>Linear failure rate</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = (\alpha + \beta x)e^{-(\alpha x + (\beta/2)x^2)}, x \geq 0, 0 < \beta \leq \alpha^2$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \alpha \\ \lambda'_F(t) \geq \beta \end{cases}$
<i>Extreme value</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \alpha e^{(\beta/\alpha)x} \exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta}(1 - e^{(\beta/\alpha)x})\right), 0 < \beta \leq \alpha^2$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \alpha \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$
<i>Generalized Pareto</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{\beta+1}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}x\right)^{-1/\beta-2}, \alpha, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \lambda_0 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq -\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)\lambda_F(t) \end{cases}$
<i>Pareto (Type II)</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \alpha\beta^\alpha (\beta+x)^{-\alpha-1}, \alpha, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\lambda_F(t) \end{cases}$
<i>Beta</i>, $[0, 1]$ $f^*(x) = \beta(1-x)^{\beta-1}, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \beta \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \left(\frac{1}{\beta}\right)\lambda_F(t) \text{ for } \beta \leq 1 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \leq \left(\frac{1}{\beta}\right)\lambda_F(t) \text{ for } \beta \geq 1 \end{cases}$

جدول ۲: توزیع های ماکزیمم انتروپی دینامیکی

چگالی MDE	قیود برای مجموعه ماکسیمال
<i>Weibull</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = k\alpha(x+x_0)^{\alpha-1}e^{-(x+x_0)^\alpha}, x_0 > 0, 0 < \alpha < 1$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \lambda_0 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \frac{\alpha-1}{x_0+t} \end{cases}$

$Half - Cauchy, [0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \frac{2}{\pi} \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq (1 - 2t \arctan t^{-1}) \lambda_F(t) \end{cases}$
$Beta, [0, 1]$ $f^*(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = 0 \\ \frac{\rho'_F(t)}{\alpha + \rho_F(t)} \geq t^{\alpha-1} [\alpha + \rho_F(t)]; \\ \alpha \leq 1, \rho_F(t) = t \lambda_F(t) \\ \frac{\rho'_F(t)}{\alpha + \rho_F(t)} \leq t^{\alpha-1} [\alpha + \rho_F(t)]; \\ \alpha \geq 1, \rho_F(t) = t \lambda_F(t) \end{cases}$
$Half - logistic, [0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{\beta(\alpha+1)e^{\beta x}}{(\alpha + e^{\beta x})^2}, \alpha, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \alpha \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$
$Half - normal, [0, \infty)$ $f^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(1/2)x^2}$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \lambda_0 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \beta - \lambda_F(t) \geq 0 \end{cases}$
$Pareto(Type II), [0, \infty)$ $f^*(x) = \alpha \beta^\alpha (\beta + x)^{-\alpha-1}, \alpha, \beta > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq \lambda_{F^*}(t) - t \end{cases}$
$Gamma, [0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{k}{\Gamma(\alpha)} (x + x_0)^{\alpha-1} e^{-(x+x_0)^\alpha}, x_0 > 0, 0 < \alpha < 1$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \lambda_0 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq -\left(\frac{\alpha-1}{x_0+t}\right) - 1 + \lambda_{F^*}(t) \end{cases}$

جدول ۳: توزیع‌های ماکزیمم انتروپی دینامیکی

چگالی MDE	قیود برای مجموعه ماکسیمال
<i>Minimum of exponential and extreme value</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = (\beta_1 e^x + \beta_2) e^{-\beta_2 x - \beta_1 (x^2 - 1)}$; $\beta_1 > 0, \beta_2 \geq 0.5$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \beta_1 + \beta_2 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t)} \geq 1 - \frac{\beta_2}{\lambda_F(t)} \end{cases}$
<i>Minimum of exponential and Pareto</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = [\beta_1 e^x + \beta_2 (x+1)] (x+1)^{-\beta-1} e^{-\beta_2 x}$; $\beta_1, \beta_2 > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \beta_1 + \beta_2 \\ \frac{\rho'_F(t)}{\rho_F(t)} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1 \lambda_F(t)} \\ \rho_F(t) = t \lambda_F(t) \end{cases}$
<i>Mixture of exponential</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \alpha \beta_1 e^{-\beta_1 x} + (1-\alpha) \beta_2 e^{-\beta_2 x}$; $0 < \alpha < 1, \beta_1 > \beta_2 > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(0) = \alpha \beta_1 + (1-\alpha) \beta_2 \\ \beta_2 \leq \lambda_F(t) \leq \beta_1 \\ \frac{\lambda'_F(t)}{\lambda_F(t) - \beta_2} \geq \lambda_F(t) - \beta_1 \end{cases}$
<i>Mixture of Paretos</i>, $[1, \infty)$ $f^*(x) = \alpha \beta_1 x^{-\beta-1} e^{-\beta_1 x} + (1-\alpha) \beta_2 x^{-\beta-1}$; $0 < \alpha < 1, \beta_1 > \beta_2 > 0$	$\begin{cases} \lambda_F(1) = \alpha \beta_1 + (1-\alpha) \beta_2 \\ \beta_2 \leq \rho_F(t) \leq \beta_1 \\ \rho_F(t) = t \lambda_F(t) \\ \frac{t \rho'_F(t)}{\rho_F(t) - \beta_2} \geq \rho_F(t) - \beta_1 \end{cases}$

جدول ۴: مدل‌های MDDI و MDE نسبت به توزیع نمایی با قیدهای نامساوی میانگین باقیمانده

چگالی	قیدهای نامساوی میانگین باقیمانده	قیدهای پارامتری	
		MDE	MDDI, $g_e(x; \lambda)$
<i>Exponential</i>, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, x > 0$	$\mu_r(t) \leq \mu$	None	

<i>Generalized Pareto</i> , $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{\alpha+1}{\beta} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}x\right)^{-1/\alpha-2}$ $\alpha, \beta > 0$	$\mu_F(t) \geq \alpha + \beta t$	<i>N.A.</i>	$\lambda \geq \frac{2\alpha+1}{\beta}$
<i>Generalized normal combination</i> $f^*(x) = \frac{e^{\beta^2/2\alpha}}{\beta} \left(\frac{(x+\beta)^2}{\alpha} - 1\right) e^{-\frac{1}{2\alpha}(x+\beta)^2}$ $0 < \alpha < \beta^2$	$\mu_F(t) \leq \alpha/(t + \beta)$	$\beta^2 \leq 3\alpha$	$\begin{cases} \beta^2 \geq 3\alpha \\ \lambda \leq \frac{\beta(\beta^2 - 3\alpha)}{\alpha(\beta^2 - \alpha)} \end{cases}$
<i>Extreme value type combination I</i> $f^*(x) = \left(\frac{1}{\alpha} e^{\beta x} - \beta\right) e^{\beta x} e^{\frac{1}{\alpha\beta}(1-e^{\beta x})}$ $\alpha\beta < 1$	$\mu_F(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$	$\alpha\beta \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\lambda \leq \frac{(1-\alpha\beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha(1-\alpha\beta)}$
<i>Half - Logistic</i> $f^*(x) = \frac{\beta(\alpha+1)e^{\beta x}}{(\alpha + e^{\beta x})^2}$ $\alpha, \beta > 0$	$\mu_F(t) \leq \frac{1}{\alpha\beta} (\alpha + e^{\beta t}) \log(1 + \alpha e^{-\beta t})$	$\alpha \leq 1$	$\begin{cases} \alpha < 1 \\ \lambda \leq \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \beta \end{cases}$
<i>Mixture of exponential</i> $f^*(x) = \alpha\beta_1 e^{-\beta_1 x} + (1-\alpha)\beta_2 e^{-\beta_2 x}$ $0 < \alpha < 1, \beta_1 > \beta_2 > 0$	$\mu_F(t) \geq \frac{\alpha\beta_1^{-1}e^{-\beta_1 t} + (1-\alpha)\beta_2^{-1}e^{-\beta_2 t}}{\alpha e^{-\beta_1 t} + (1-\alpha)e^{-\beta_2 t}}$	<i>N.A.</i>	$\lambda \leq \max\{\beta_1, \beta_2\}$

فهرست منابع

1. Carlen, E, Soffer, A. (1991). Entropy and Production by Block Variable Summation and Central Limit Theorems. *Comm. Math. Phys.* 140(2) :339-371.
2. Cover, T. and Thomas, J. (2015). *Elements of Information Theory*. John Wiley, New York.
3. Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System, Tech. J.*, 27:379-423, 623- 656
4. Johnson, O. *Entropy and the Central Limit Theorem*. Imperial College Press.