

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

پژوهشنامه علوم دفاعی، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۳

ص ص ۹۵ تا ۱۰۶

زیر رده‌هایی از توابع حلزونی بر مبنای عملگر مشتق سالگون

محمد مهدی شعبانی^۱

چکیده

تابع تحلیلی و یک به یک $f(z)$ که بر دیسک واحد تعریف شده، با شرایط $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$ را یک تابع تک ارز می‌نامیم. در این مقاله با استفاده از مشتق سالگون و خاصیت زیر ترتیبی، دو رده از توابع حلزونی $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ را معرفی می‌کنیم. رابطه $zf'(z) \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B] \Leftrightarrow f(z) \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ بین این دو رده برقرار است. این دو رده از توابع حلزونی در حالت‌های خاص به رده توابع ستاره‌گون و رده توابع محدب تبدیل می‌شوند. قضیه اصلی در این مقاله اعمال شرایطی بر ضرایب بسط تیلور تابع $f(z)$ است تا با استفاده از آن، شرط لازم و کافی برای متعلق بودن تابع $f(z)$ به رده $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ محقق شود. قضیه مشابه برای رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ نیز نتیجه می‌شود. در ادامه کران بالا برای ضرایب بسط تیلور این دو رده از توابع حلزونی را بدست می‌آوریم. همچنین رابطه شمول بین رده‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

واژگان کلیدی: توابع تحلیلی تک ارز، توابع حلزونی، ضرب هادامارد، مشتق سالگون، زیرترتیب.

۱. استادیار گروه ریاضی دانشگاه امام علی (ع)، تهران، ایران. ایمیل: Mohammadmehdishabani@yahoo.com

۱. تعاریف و مفاهیم اولیه

نمادگذاری: تمام توابع به شکل

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad (1,1)$$

که روی دیسک واحد $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند را با $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم. همچنین آن دسته از توابع $f \in \mathcal{A}$ که روی دیسک واحد $\mathbb{U}$ تک ارز باشند را نیز با $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم.

تابع $f \in \mathcal{S}$ را یک تابع ستارگون روی $\mathbb{U}$ گوئیم هرگاه $f(\mathbb{U})$ نسبت به مبدا یک دامنه ستاره‌گون باشد. تابع f ستاره‌گون است اگر و تنها اگر [۴]

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad (z \in \mathbb{U}).$$

تمام توابع ستارگون را با $\mathcal{S}^*$ نمایش می‌دهیم.

همچنین تابع $f \in \mathcal{S}$ را یک تابع محدب روی $\mathbb{U}$ گوئیم هرگاه $f(\mathbb{U})$ یک دامنه محدب باشد. تابع f محدب است اگر و تنها اگر [۴]

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0, \quad (z \in \mathbb{U}).$$

تمام توابع محدب را با $\mathcal{K}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین رابطه زیر برای زیر رده‌های $\mathcal{A}$ برقرار است [۴، ۱۶].

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}.$$

برای توابع تحلیلی $g(z)$ و $h(z)$ در $\mathbb{U}$ ، تابع $g(z)$ را زیرترتیب $h(z)$ گوئیم هرگاه تابع تحلیلی $\omega(z)$ روی $\mathbb{U}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\omega(0) = 0, \quad |\omega(z)| < 1, \quad g(z) = h(\omega(z)), \quad (z \in \mathbb{U})$$

آن را با نماد $g(z) < h(z)$ نمایش می‌دهیم.

در حالت خاص، اگر $h(z)$ روی $\mathbb{U}$ تک ارز باشد، آنگاه $[10]$:

$$g(z) < h(z) \Leftrightarrow g(\circ) = h(\circ), \quad g(\mathbb{U}) \subset h(\mathbb{U}).$$

سالاگون [۱۲] در سال ۱۹۸۳ عملگر مشتق $\mathcal{D}^n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ را بصورت زیر معرفی نمود:

$$\mathcal{D}^0 f(z) = f(z),$$

$$\mathcal{D}^1 f(z) = \mathcal{D}f(z) = zf'(z),$$

$$\mathcal{D}^n f(z) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1} f(z)) = z(\mathcal{D}^{n-1} f(z))', \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

بنابراین برای تابع $f(z)$ با بسط سری توانی $(1, 1)$ داریم:

$$\mathcal{D}^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}. \quad (1, 2)$$

همچنین برای تابع $f(z)$ با بسط سری توانی $(1, 1)$ و تابع $g(z)$ با بسط سری توانی

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k, \quad (1, 3)$$

ضرب هادامارد یا کانولوشن $f(z)$ و $g(z)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(z) * g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k. \quad (1, 4)$$

تعریف: با استفاده از زیرترتیبی و عملگر مشتق سالاگون روی توابع تحلیلی، دو رده از توابع

حلزونی را بصورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_n^\alpha[A, B] = \left\{ f \in \mathcal{S}: e^{i\alpha} \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)} < \cos \alpha \left(\frac{1 + Az}{1 + Bz} \right) + i \sin \alpha, \quad (z \in \mathbb{U}) \right\}, \quad (1, 5)$$

و

$$\mathcal{K}_n^\alpha[A, B] = \left\{ f \in \mathcal{S}: e^{i\alpha} \left(1 + \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))''}{(\mathcal{D}^n f(z))'} \right) \right. \\ \left. < \cos \alpha \left(\frac{1 + Az}{1 + Bz} \right) + i \sin \alpha, \quad (z \in \mathbb{U}) \right\}.$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ و $-1 \leq B < A \leq 1$ می باشد. توجه داشته باشیم:

$$zf'(z) \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B] \iff f(z) \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B].$$

یادآوری: با قرار دادن مقادیر مختلف در پارامترهای موجود در رده های $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ می توان زیر رده هایی از $\mathcal{S}$ را که اخیراً محققین در این زمینه تعریف و مورد مطالعه قرار دادند را بدست آورد. در ادامه بذکر چند مورد آن می پردازیم.

۱. $\mathcal{S}_\circ^\circ[A, B] = \mathcal{S}[A, B]$ و $\mathcal{K}_\circ^\circ[A, B] = \mathcal{K}[A, B]$ زیر رده های $\mathcal{S}[A, B]$ و $\mathcal{K}[A, B]$ توسط بسیاری از محققین [۱، ۵، ۷، ۸، ۱۴] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۲. $\mathcal{S}_\circ^\circ[1 - 2\beta, -1] = \mathcal{S}^*(\beta)$ و $\mathcal{K}_\circ^\circ[1 - 2\beta, -1] = \mathcal{K}(\beta)$ زیر رده های $\mathcal{S}^*(\beta)$ و $\mathcal{K}(\beta)$ توسط گودمن [۶] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۳. $\mathcal{S}_\circ^\circ\left[\frac{b^2 - a^2 + b}{b}, \frac{1-b}{a}\right] = \mathcal{S}(a, b)$ و $\mathcal{K}_\circ^\circ\left[\frac{b^2 - a^2 + b}{b}, \frac{1-b}{a}\right] = \mathcal{K}(a, b)$ زیر رده های $\mathcal{S}(a, b)$ و $\mathcal{K}(a, b)$ توسط سیلورمن و سیلویا [۱۴، ۱۵] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۴. $\mathcal{S}_\circ^\alpha[A, B] = \mathcal{S}^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}_\circ^\alpha[A, B] = \mathcal{K}^\alpha[A, B]$ زیر رده های $\mathcal{S}^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{K}^\alpha[A, B]$ توسط بسیاری از محققین [۲، ۳، ۱۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۵. $\mathcal{S}_\circ^\circ[A, B] = \mathcal{R}_\circ[A, B]$ و $\mathcal{K}_\circ^\circ[A, B] = \mathcal{R}_1[A, B]$ زیر رده های $\mathcal{R}_\circ[A, B]$ و $\mathcal{R}_1[A, B]$ توسط آوجا [۱] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

۲. خواص کانولوشن رده های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

در تمامی قضایا فرض می کنیم $|\xi| = 1$ ، $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ ، $-1 \leq B < A \leq 1$ و $\mathcal{D}^n f(z)$ عملگر مشتق سالگون روی تابع $f(z)$ باشد. برای اثبات قضیه بعد نیاز به لم زیر داریم که توسط سیلورمن و سیلویا [۱۴] اثبات شده است.

لم ۲,۱: [۱۴] تابع $f(z)$ با بسط سری توانی $(1,1)$ در رده $\mathcal{S}^*[A, B]$ قرار دارد اگر و تنها اگر برای $z \in \mathbb{U}$ و $|\xi| = 1$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{z} \left[f * \frac{z + \frac{\xi - A}{A - B} z^2}{(1 - z)^2} \right] \neq 0. \quad (2,1)$$

لم ۲,۲: تابع $f(z)$ با بسط سری توانی $(1,1)$ متعلق به رده $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ است اگر و تنها اگر برای $z \in \mathbb{U}$ و $|\xi| = 1$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k - \psi}{1 - \psi} \right) k^n z^k \right) \right] \neq 0, \quad (2,2)$$

که در آن

$$\psi = \frac{e^{i\alpha} + (\cos \alpha + i \sin \alpha) \xi}{e^{i\alpha} (1 + B\xi)}. \quad (2,3)$$

اثبات: با توجه به رابطه $(1,5)$ و با بکاربردن لم ۲,۱ داریم $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر

$$e^{i\alpha} \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)} \neq \cos \alpha \left(\frac{1 + Az}{1 + Bz} \right) + i \sin \alpha, \quad (z \in \mathbb{U}, |\xi| = 1)$$

در نتیجه داریم:

$$z(\mathcal{D}^n f(z))' - \mathcal{D}^n f(z) \left(\frac{e^{i\alpha} + (\cos \alpha + i \sin \alpha) \xi}{e^{i\alpha} (1 + B\xi)} \right) \neq 0. \quad (2,4)$$

از طرفی با توجه به خواص کانولوشن داریم:

$$zf'(z) = f(z) * \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad f = f(z) * \frac{z}{1 - z}.$$

لذا برای توابع $\mathcal{D}^n f(z)$ و $z(\mathcal{D}^n f(z))'$ معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\mathcal{D}^n f(z) = f(z) * h(z) * \frac{z}{1-z}, \quad z(\mathcal{D}^n f(z))' = f(z) * h(z) * \frac{z}{(1-z)^2},$$

که در آن $h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n z^k$ می باشد. حال با جایگذاری

$$\psi = \frac{e^{i\alpha} + (\cos \alpha + i \sin \alpha)\xi}{e^{i\alpha}(1 + B\xi)},$$

در رابطه (۲,۴) داریم:

$$f(z) * h(z) * \left(\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{\psi z}{1-z} \right) \neq 0, \quad (2,5)$$

از طرفی با توجه به بسط سری توانی توابع $z/(1-z)^2$ و $z/(1-z)$ داریم:

$$\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{\psi z}{1-z} = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k, \quad (2,6)$$

با جایگذاری (۲,۶) در (۲,۵) اثبات کامل می شود.

قضیه ۲,۳: فرض کنید تابع $f(z)$ دارای بسط سری توانی $(1,1)$ باشد. آنگاه $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ است اگر و تنها اگر

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A - kB)\xi \cos \alpha}{(A - kB)\xi \cos \alpha} k^n a_k z^{k-1} \neq 0. \quad (2,7)$$

اثبات: با توجه به تعریف ψ در رابطه (۲,۳) داریم:

$$\frac{k-\psi}{1-\psi} = \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A - kB)\xi \cos \alpha}{(A - kB)\xi \cos \alpha}, \quad (2,8)$$

حال با توجه به (۲,۸) می توان (۲,۲) را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{z} \left[z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A - kB)\xi \cos \alpha}{(A - kB)\xi \cos \alpha} k^n a_k z^{k-1} \right] \neq 0. \quad (2,9)$$

با ساده کردن (۲,۹) رابطه (۲,۷) بدست می آید.

لم ۲,۴: تابع $f(z)$ با بسط سری توانی $(1,1)$ در رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ قرار دارد اگر و تنها اگر برای $z \in \mathbb{U}$ و $|\xi| = 1$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k \right) \right] \neq \circ, \quad (2,10)$$

که در آن ψ در رابطه (۲,۳) تعریف شده است.

اثبات: قرار می‌دهیم:

$$g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k,$$

بنابراین

$$zg'(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k, \quad (2,11)$$

از خواص کانولوشن داریم $zf' * g = f * zg'$ ، همچنین $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد. حال از لم ۲,۱ داریم:

$$\frac{1}{z} [zf'(z) * g(z)] \neq \circ \Leftrightarrow \frac{1}{z} [f(z) * zg'(z)] \neq \circ, \quad (2,12)$$

با جایگذاری رابطه (۲,۱۱) در (۲,۱۲)، رابطه (۲,۱۰) بدست می‌آید.

مشابه قضیه ۲,۳، با استفاده از لم ۲,۴، قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۲,۵: فرض کنید تابع $f(z)$ دارای بسط سری توانی $(1,1)$ باشد. آنگاه $f \in \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ است اگر و تنها اگر

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A - kB)\xi \cos \alpha}{(A - kB)\xi \cos \alpha} k^{n+1} a_k z^{k-1} \neq \circ. \quad (2,13)$$

۳. کران ضرایب رده‌های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

بعنوان کاربردهایی از قضایای ۲,۳ و ۲,۵ می‌توان کران ضرایب بسط سری توانی توابعی که متعلق به رده‌های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشند را بدست آورد.

قضیه ۳,۱: فرض کنید تابع $f(z)$ دارای بسط سری توانی $(1,1)$ متعلق به رده $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد آنگاه

$$\sum_{k=2}^{\infty} (|k(B+1)-1| + |\cos \alpha + iB \sin \alpha|) k^n |a_k| \leq (A-B) \cos \alpha. \quad (3,1)$$

اثبات: بنابر قضیه ۲,۳ داریم:

$$\begin{aligned} & \left| 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A-kB)\xi \cos \alpha}{(A-kB)\xi \cos \alpha} k^n a_k \right| \\ & \geq 1 - \sum_{k=2}^n \left| \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A-kB)\xi \cos \alpha}{(A-kB)\xi \cos \alpha} \right| k^n |a_k| \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A-kB)\xi \cos \alpha}{(A-kB)\xi \cos \alpha} \right| \\ & = \frac{|(k-1)(e^{i\alpha} + iB \sin \alpha) - (A-kB)\xi \cos \alpha|}{(A-kB)\xi \cos \alpha} \\ & \leq \frac{|k(B+1)-1| + |\cos \alpha + iB \sin \alpha|}{(A-B) \cos \alpha}. \end{aligned}$$

لذا نامساوی (۳,۱) از قضیه ۲,۳ بدست می‌آید.

به‌طور مشابه برای رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳,۲: فرض کنید تابع $f(z)$ دارای بسط سری توانی $(1,1)$ متعلق به رده $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ باشد آنگاه

$$\sum_{k=2}^{\infty} (|k(B+1)-1| + |\cos \alpha + iB \sin \alpha|) k^{n+1} |a_k| \leq (A-B) \cos \alpha. \quad (3,1)$$

۴. خواص شمول رده‌های $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$ و $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$

قضیه ۴،۱: برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{S}_{n+1}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

اثبات: فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_{n+1}^\alpha[A, B]$ از لم ۲،۲ داریم:

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k \right) \right] \neq 0, \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4,1)$$

که در آن ψ در (۲،۳) آمده است. از طرفی

$$\begin{aligned} z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^{n+1} z^k \\ = \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n z^k \right) * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k \right). \end{aligned} \quad (4,2)$$

همچنین برای $z \in \mathbb{U}$ داریم:

$$\frac{1}{z} \left[\left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n z^k \right) * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} z^k \right) \right] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} z^k = \frac{1}{1-z} \neq 0. \quad (4,3)$$

بنابراین از (۴،۲) داریم:

$$\frac{1}{z} \left[f * \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k-\psi}{1-\psi} \right) k^n z^k \right) \right] \neq 0, \quad (z \in \mathbb{U})$$

لذا f به $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ متعلق است و در نتیجه $\mathcal{S}_{n+1}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

به‌طور مشابه قضایای زیر را می‌توان نشان داد.

قضیه ۲,۴: برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{K}_{n+1}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}_n^\alpha[A, B]$.

قضیه ۳,۴: برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}^\alpha[A, B]$.

قضیه ۴,۴: برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{K}_n^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}^\alpha[A, B]$.

یادآوری ۴,۵: در حالت خاص، از قضایای ۴,۳ و ۴,۴ داریم $\mathcal{K}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}^\alpha[A, B]$.

قضیه ۶,۶: فرض کنید $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و $\varphi \in \mathcal{K}$ باشد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f * \varphi \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

اثبات: فرض کنیم $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ و

$$F(z) := \frac{z(\mathcal{D}^n f(z))'}{\mathcal{D}^n f(z)}$$

لذا $e^{i\alpha} F(z) < h(z)$ که در آن $h(z) = \cos \alpha \left(\frac{1+Az}{1+Bz} \right) + i \sin \alpha$ می باشد. قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} G(z) &:= \frac{z(\varphi * \mathcal{D}^n f(z))'}{\varphi * \mathcal{D}^n f(z)} = \frac{z(\varphi * (\mathcal{D}^n f(z)))'}{\varphi * \mathcal{D}^n f(z)} = \frac{\varphi * (z(\mathcal{D}^n f(z)))'}{\varphi * \mathcal{D}^n f(z)} \\ &= \frac{\varphi * (F. (\mathcal{D}^n f(z)))}{\varphi * \mathcal{D}^n f(z)}. \end{aligned}$$

از طرفی $f \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ لذا $\mathcal{D}^n f(z) \in \mathcal{S}^*$. حال از قضیه ۱,۲ [۱۳] داریم:

$$\frac{\varphi * (F. (\mathcal{D}^n f(z)))}{\varphi * \mathcal{D}^n f(z)} \in \text{convexhull}(F(U)).$$

اما $e^{i\alpha} F(z) < h(z)$ و تابع $h(z)$ محدب می باشد، بنابراین $\text{convexhull}(F(U)) \subset h(U)$ لذا $e^{i\alpha} G(U) \subset h(U)$.

همچنین $e^{i\alpha} G(\circ) = h(\circ)$ در نتیجه $e^{i\alpha} G(z) < h(z)$ و با توجه به تعریف $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ داریم $f * \varphi \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

قضیه ۷,۴: فرض کنید $f, g \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f * g \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$.

اثبات: فرض کنیم $\varphi \in \mathcal{S}_n^\alpha[A, B]$ باشد، در قضیه ۱، نشان دادیم $\mathcal{S}_n^\alpha[A, B] \subset \mathcal{S}_1^\alpha[A, B]$ و از طرفی $\mathcal{K}_0^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}^\alpha[A, B] \subset \mathcal{K}$ می باشد لذا $\varphi \in \mathcal{K}$ است. حال با توجه به قضیه ۶، و قرار دادن $\varphi = g$ ، قضیه ۷، ثابت می شود.

فهرست منابع

1. O. P. Ahuja, "Families of analytic functions related to Ruscheweyh derivatives and subordinate to convex functions", Yokohama Math. J. 41, (1993), 39-50.
2. S. S. Bhoosnurmath and M.V. Devadas, "Subclasses of spirallike functions defined by subordination", J. of Analysis Madras 4, (1996), 173-183.
3. S. S. Bhoosnurmath and M.V. Devadas, "Subclasses of spirallike functions define Ruschweyh derivatives", Tamkang J. Math. 28, (1997), 59-65.
4. P. L. Duren, "Univalent Functions", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo, (1983).
5. R. M. Goel and B. S. Mehrotra, "On the coefficients of a subclass of starlike functions", Indian J. Pure Appl. Math. 12, (1981), 634-647.
6. A.W.Goodman, "Univalent Functions", Vol. I Vol. II Polygonal Publishing House, Washington, FI, (1983).
7. W. Janowski, "Some extremal problems for certain families of analytic functions", Bull. Polish Acad. Sci. 21, (1973), 17-25.
8. W. Janowski, "Some extremal problems for certain families of analytic functions", Annl. Polon. Math. 28, (1973), 297-326.
9. Y. C. Kim and T. Sugawa, "Correspondence between spirallike functions and starlike Functions", Math. Nachr. 285, (2012), 322-331.
10. S. S. Miller and P. T. Mocanu, "Differential Subordinations, Theory and applications", Marcel Dekker, New York, (2000).
11. S.V. Nikitin, "A class of regular functions", current problems in function theory (Russian), Rostov-Gos. Univ. Rostov-on-Don, 188, (1987), 143-147.
12. G. S. Salagean, "Subclasses of univalent functions", Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1013, (1983), 362-372.
13. T. N. Shanmugam, "Convolution and Differential Subordination", Internat. J. Math.

- Sci. 12, (1989) 333-340.
- 14.H. Silverman and E. M. Silvia, "Subclasses of starlike functions subordinate to convex functions", *Canad. J. Math.* 1, (1985), 48-61.
- 15.H. Silverman, "Subclasses of starlike functions", *Rev. Roumaine. Math. Pures Appl.*, 231 (1978), 1093-1099.
- 16.H. M. Srivastava and S. Owa, "Current Topics in Analytic Function Theory", World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1992).
- 17.T. Seoudy, "Classes of spirallike functions defined by the Dziok-Srivastava operator", *Le Matematiche.* 69 (2014), 93-102.